falls existent.

Klar für $x_0 \in (a,b)$:

$$\boxed{f \text{ diff'bar in } x_0 \iff f'_\pm(x_0) \text{ existieren und sind gleich}}$$

(typisches „Beispiel": $f(x) = |x|$ in 0)

$\boxed{\text{Satz 11.3}}$ (Ableitungsregeln, „algebraischer Teil")

Seien f, g differenzierbar in $a \implies$

$$\boxed{f \pm g, \quad f \cdot g, \quad 1/f \quad (\text{falls } f(a) \neq 0)}$$

sind diff'bar in a mit

$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$,

$(f \cdot g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$,

(Produktregel)

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)} .$$

Beweis: 1.) $f \pm g$ klar!

2.) $$\frac{1}{h}\left\{ f(a+h)\,g(a+h) - f(a)\,g(a) \right\} =$$

$$\frac{1}{h}\left\{ \left(f(a+h) - f(a)\right) g(a+h) + f(a)\left(g(a+h) - g(a)\right)\right\} =$$

$$\underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\longrightarrow f'(a)} \cdot \underbrace{g(a+h)}_{\substack{\longrightarrow g(a), \\ \text{Satz 11.1}}} + f(a)\,\underbrace{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}_{\longrightarrow g'(a)}$$

3.) $$\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}\right\} = -\frac{f(a+h)-f(a)}{h\,f(a)\,f(a+h)}$$

$\square$

Beispiele:

① Quotientenregel: f, g diff'bar in a, $g(a) \neq 0$

$$\Longrightarrow \frac{f}{g} \text{ diff'bar in } a \text{ mit } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

② man bekommt aus ①:

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\cos \cdot \cos + \sin \cdot \sin}{\cos^2}$$

$$= \frac{1}{\cos^2}$$

③ $$\cosh'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)\right\} = \sinh x$$

$\square$

Wie differenziert man $g \circ f$? (f reell-wertig!)

ein Versuch: $$\frac{1}{h}\Big(g(f(x+h)) - g(f(x))\Big) =$$

$$\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad)$$

voraus gesetzt ⊛ $\boxed{f(y) \neq f(x) \text{ für } y \neq x}$ in der Nähe von x. Bei $h \to 0$ gilt dann:

$$\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)} \longrightarrow g'(f(x)),$$

also: $\boxed{(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)}$

Wie vermeidet man ⊛? Dazu braucht man

Satz 11.4 : (alternative Beschreibung der Differenzierbarkeit)

f differenzierbar in x_0 $\iff$

es gibt eine in x_0 stetige Funktion r mit

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + r(x)\,(x - x_0)}$$

<u>Beweis</u>: "$\Longrightarrow$" setze

$$r(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0 . \end{cases}$$

r ist wegen Diff'barkeit von f in x_0 stetig dort

"$\Longleftarrow$" für $x \neq x_0$ ist offenbar

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = r(x),$$

und da r stetig ist in x_0, folgt die Existenz von $f'(x_0)$ $\boxed{\text{mit Wert } r(x_0).}$

$\square$

Damit können wir die wichtigste Ableitungsregel beweisen:

Satz 11.5 : (<u>Kettenregel</u>) <u>für reellwertige Funktionen</u>

Seien I, J Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(I) \subset J.$$

Ist f diff'bar in $x_0 \in I$ und g diff'bar in $f(x_0) \in J$, so ist $g \circ f$ diff'bar in x_0 mit

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).}$$

Beweis: Satz 11.4 $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + r(x)(x-x_0), & r \text{ stetig } \underline{\text{in } x_0} \\ g(y) = g(f(x_0)) + R(y)(y-f(x_0)), & R \text{ stetig } \underline{\text{in } f(x_0)} \end{cases}$$

$y = f(x)$

$$\Longrightarrow g(f(x)) = g(f(x_0)) + R(f(x))\underbrace{(f(x)-f(x_0))}$$

$$= g(f(x_0)) + R(f(x)) \cdot \overbrace{r(x)\,(x-x_0)}$$

$$= g(f(x_0)) + \tilde{r}(x)\,(x-x_0)$$

mit $\boxed{\tilde{r}(x) := R(f(x))\,r(x)}$ stetig in x_0;

Satz 11.4 („$\Longleftarrow$") liefert die Beh. $\square$

Beispiele

① f diff'bar $\Longrightarrow \frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

② Sei für $a \in \mathbb{R}$

$$h(x) := x^a, \quad x > 0.$$

Schreibe $h(x) = \left(e^{\ln x}\right)^a =$

$\exp(a \ln x) = g(f(x))$ mit

$$g(y) := e^y, \quad f(x) := a \ln x \Longrightarrow$$

$$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x) = e^{f(x)} \frac{a}{x} =$$

$$a \frac{1}{x} x^a = a x^{a-1}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^a = a x^{a-1}}$$

eine <u>mögliche</u> Anwendung der Kettenregel <u>könnte</u> so aussehen:

f sei diff'bar in x_0 und habe
eine <u>Umkehrfunktion</u> $g = f^{-1}$:
<u>Wie sieht</u> $g'(y_0)$, $y_0 := f(x_0)$, <u>aus</u>?

es gilt $g(f(x)) = x \xRightarrow{11.5}$

$$g'(f(x_0))\, f'(x_0) = 1 \Longrightarrow$$

$$g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Für die Rechnung muss man wissen:

- g diff'bar in y_0
- $f'(x_0) \neq 0$

$\boxed{\text{Satz 11.6}}$: (Ableitung der Inversen)

$f : I \to \mathbb{R}$ sei $\boxed{\text{injektiv}}$ und

differenzierbar an einer Stelle $a \in I$.

Es gelte:

(1) $f'(a) \neq 0$

(2) $g := f^{-1}$ ist stetig in $b := f(a)$.

Dann ist g diff'bar in b mit

$$\boxed{g'(b) = \frac{1}{f'(a)}}$$

Bem: Vor. (1) ist „natürlich" im Hinblick

auf die zu erwartende Ableitungsformel.

Vor (2) ist erfüllt, falls (vgl. Satz 9.4)

$$\boxed{f \text{ stetig auf } I}$$

In diesem Fall ist g insgesamt stetig.

Beweis: Satz 11.4 $\Longrightarrow$

$$f(x) = f(a) + r(x)(x-a), \quad r \text{ stetig in } a;$$

es folgt: $\quad (x = g(y)!)$

$$g(y) = g(b) + \frac{1}{r(g(y))}(y-b)$$

und $\boxed{R(y) := \frac{1}{r(g(y))}}$ ist stetig in b

(wegen $r(a) \neq 0$ und der Stetigkeit von g)

Nun benutze Satz 11.4.

$\square$

Beispiel : $\frac{d}{dx} \arctan x = ?$

$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ streng wachsend,

an jeder Stelle diff'bar mit

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 \quad (>0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (\arctan)'(y) = \dfrac{1}{\tan' x}, & y \in \mathbb{R}, \\ x := \arctan y & \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (\arctan)'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)}$$

$$= \frac{1}{1+y^2}$$

Übung : $\frac{d}{dx}$ von $\left\{ \begin{array}{l} \arcsin, \arccos, \ldots\ldots \\ \operatorname{ar}\sinh, \ldots \end{array} \right\}$

$\boxed{\text{Def. 11.3}}$: Sei I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{C}$.

1.) f diff'bar auf I $:\Longleftrightarrow$

$f'(x)$ existiert für alle $x \in I$

2.) Ist f diff'bar auf I, so setzt man:

$$\boxed{f''(x_0) := \frac{d}{dx}(f')(x_0),}$$

falls existent. Andere Schreibweisen:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0), \quad f^{(2)}(x_0), \quad \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0}$$

3.) rekursiv: $f^{(0)} := f$,

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)', \quad n \in \mathbb{N},$$

falls bildbar!

4.) $n \in \mathbb{N}_0$: $C^n(I) := \mathbb{C}$-Vektorraum aller Funktionen $f: I \to \mathbb{C}$, $f^{(0)}, \dots, f^{(n)}$ existieren und sind stetig („n mal stetig diff'bar");

$$\boxed{C^\infty(I) := \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(I)}$$

(Bem: „C" steht für „continuous" = stetig)

Beispiele:

① Polynome, rationale Funktionen, exp, cis, sin, cos, tan, cot, sinh, cosh, tanh, coth

sind C^∞ auf ihrem Definitionsbereich

② Ableitungsformel für die Inverse:

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'} \circ f^{-1}$$

Man liest ab: $f \in C^\infty \Longrightarrow$ rechte Seite zumindest stetig, also

$$f^{-1} \in C^1$$

Durch Weiterdifferenzieren folgt: $f^{-1} \in C^\infty$

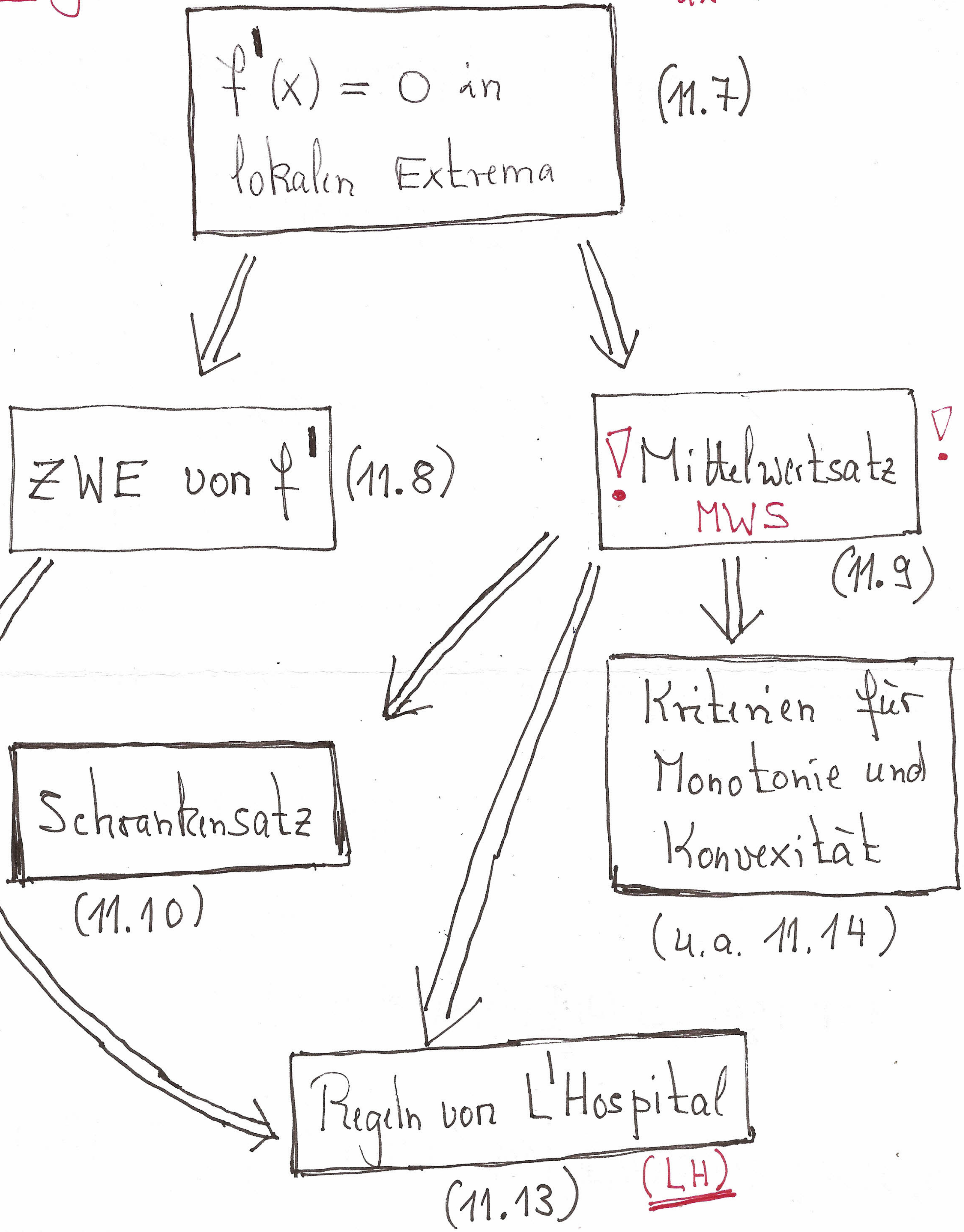
$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{arc und area Fktn} \in C^\infty}$

③ „$|x|$" zeigt: $C^1(I) \subsetneqq C^0(I)$

allgemein: $C^n(I) \subsetneqq C^{n-1}(I)$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

Organisation: „Info über f via $\frac{d}{dx} f$"



Anwendung: Extremwerte

$\boxed{\text{Def. 11.4}}$: Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{R}$.

f hat in $x_0 \in D$ ein

a) globales Maximum: $f(x) \leq f(x_0) \ \forall x \in D$

b) lokales Maximum: $\exists$ Umgebung U von x_0 mit $f(x) \leq f(x_0) \ \forall \ x \in U \cap D$.

analog: globales / lokales Minimum;

„globale, lokale Extremwerte"

bekannt: $\boxed{\begin{array}{l} D \text{ kompakt}, \ f: D \to \mathbb{R} \text{ stetig} \\ \Longrightarrow \ \exists \text{ globale Extremwerte} \end{array}}$

(man kann sich also auf die Suche machen!)

Satz 11.7 : Sei I ein Intervall, $x_0 \in I$ innerer Punkt. Ist x_0 eine lokale Extremstelle von $f: I \to \mathbb{R}$, und ist f in x_0 diff'bar, so gilt

$$\boxed{f'(x_0) = 0}.$$

Beweis: O.E. x_0 lok. Max. $\Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit $f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in I \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$$\underset{0<h<\varepsilon}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\frac{1}{h}\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big)}_{\xrightarrow[h \downarrow 0]{} f'(x_0)} \le 0$$

und für $-\varepsilon < h < 0$

$$\underbrace{\frac{1}{h}\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big)}_{\longrightarrow f'(x_0) \text{ bei } h \uparrow 0} \ge 0.$$

$\square$

Bem: x_0 Randpunkt $\Longrightarrow$

Ungleichung für $f'_+(x_0)$ bzw. $f'_-(x_0)$.

Anwendung 1: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\overbrace{\text{stetig}}^{\text{auf } [a,b]}$

und diff'bar auf (a,b).

Globale Extremwerte = ?

i) berechne $f(a), f(b)$

ii) bestimme die Nullstellen von f'

auf (a,b); das seien endlich viele

$\rightsquigarrow x_1, \ldots, x_p$

iii) Tabelle

x	a	x_1	$\ldots$	x_p	b
y	$f(a)$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$f(b)$

$\rightsquigarrow$ Ablesen liefert max/min $\square$

<u>klar</u>: $f'(x_0) = 0 \underset{\text{i.a.}}{\not\Longrightarrow} x_0$ Extremwert

z.B. $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$

<u>Anwendung 2</u>: Die Ableitung hat immer die ZWE, auch wenn sie unstetig ist!

$\boxed{\text{Satz 11.8}}$: Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diff'bar, also auch in den Randpunkten.

Ist $f'(a) \neq f'(b)$, so nimmt f' auf (a,b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.

<u>Bem</u>: Klar, falls $f \in C^1([a,b])$ (dann ZWE für stetige Funktionen) !